

Амирханов Д.С., Мерзликин Б.С., Шишаев Г.Ю., Широков А.В., Матвеев И.В.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск, Россия, denis.amirhanov@yandex.ru, merzlikin@tpu.ru, shishaevgy@hw.tpu.ru, shirokovAV@hw.tpu.ru, mivvas@tpu.ru

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ВАРИАЦИОННОГО КВАНТОВОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДА В КЕРНЕ

Оценена применимость квантовых алгоритмов решения систем линейных уравнений – алгоритма Харроу–Хассидима–Ллойда и вариационного квантового алгоритма – к задаче стационарной фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. В эйконоальном (квазистационарном) приближении начально-краевая задача для уравнения пьезопроводности сводится к уравнению Пуассона для давления, которое методом конечных разностей дискретизируется в систему линейных алгебраических уравнений. Приведен анализ структурных соответствий между постановкой задачи и требованиями квантовых алгоритмов; обсуждаются проблемы кодирования данных, подготовки квантовых состояний и извлечения результатов. Работоспособность подхода проверена на томографическом снимке среза реального керна: для области 8×8 узлов решения, полученные вариационным квантовым алгоритмом и классическим прямым методом, сопоставлены по полям давления и скоростей фильтрации с расчётом абсолютной ошибки. Установлено, что вариационный квантовый алгоритм воспроизводит распределение давления и поле скоростей, согласующееся с классическим решением, что подтверждает корректную работу гибридного квантово-классического подхода на модельном примере. Полученные результаты демонстрируют возможность использования вариационных квантовых алгоритмов решения систем линейных уравнений в задачах цифрового моделирования керна, обозначают их преимущества и фундаментальные ограничения в контексте подземной гидродинамики и определяют направление дальнейших исследований на более крупных моделях.

Ключевые слова: фильтрация жидкости в пористой среде, система линейных уравнений, вариационный квантовый алгоритм, алгоритм Харроу–Хассидима–Ллойда, метод конечных разностей, уравнение Пуассона, цифровое моделирование керна.

Для цитирования: Амирханов Д.С., Мерзликин Б.С., Шишаев Г.Ю., Широков А.В., Матвеев И.В. Анализ применимости вариационного квантового алгоритма решения систем линейных уравнений к задаче фильтрации флюида в керне // Нефтегазовая геология. Теория и практика. - 2026. - Т.21. - №3. - https://www.ngtp.ru/rub/2026/24_2026.html EDN: SLOFKA

Введение

Цель работы – оценить применимость квантовых алгоритмов решения систем линейных уравнений к задаче стационарной фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде. Для достижения этой цели уравнение Пуассона для давления, полученное из закона Дарси и уравнения неразрывности, дискретизируется на расчётной сетке методом конечных разностей с формированием системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), после чего анализируются классические методы её решения, квантовый алгоритм Харроу–Хассидима–

Ллойда (ННЛ, далее ХХЛ) и вариационный квантовый алгоритм решения систем линейных уравнений (VQLS, далее ВКЛУ).

Первым этапом является вывод основного уравнения. Для описания плоскостного стационарного течения несжимаемой жидкости в однородной пористой среде используется закон Дарси, связывающий поле скоростей фильтрации с градиентом давления. В сочетании с уравнением неразрывности он сводится к уравнению Пуассона для поля давления. В простейшем изотропном случае это уравнение имеет вид оператора Лапласа, примененного к давлению, с правой частью, определяющей источники или стоки (например, нагнетательные и добывающие скважины). Данное дифференциальное уравнение дополняется заданием граничных условий (например, Дирихле или Неймана) на контуре моделируемой области для получения поля давления в пористой среде.

Для построения конечно-разностной аппроксимации, моделируемая область дискретизируется на равномерную ортогональную сетку, узлам которой сопоставляются значения давления. Производные в уравнении Пуассона аппроксимируются разностными схемами второго порядка точности, например, пятиточечным шаблоном в двумерном случае. В результате для каждого внутреннего узла сетки выписывается линейное уравнение, связывающее давление в центральном узле с давлениями в четырех соседних узлах и правой частью. Учет граничных условий модифицирует уравнения для узлов, прилегающих к границе. Совокупность уравнений для всех узлов сетки образует разреженную СЛАУ с матрицей, имеющей регулярную ленточную структуру (в простейшем случае – пятидиагональную). Правой частью системы является дискретный аналог функции источников.

Классическое решение полученной СЛАУ осуществляется численными методами линейной алгебры. Для задач малой и средней размерности часто применяются прямые методы на основе LU-разложения, при котором матрица системы представляется в виде произведения нижней треугольной матрицы L и верхней треугольной матрицы U . Такое разложение позволяет получить решение системы посредством последовательных прямой и обратной подстановок. Однако для крупных трехмерных задач, характерных для детального моделирования керна, преимущество имеют итерационные методы: методы сопряженных градиентов (для симметричных положительно определенных систем), обобщенный метод минимальных невязок или многосеточные методы, которые эффективно используют разреженность матрицы и позволяют достичь решения с заданной точностью за приемлемое время даже для очень больших систем. Однако, вычислительная сложность всех классических алгоритмов ограничивает их скорость и накладывает значительные ограничения в дальнейшей перспективе их использования.

В данной работе полученная система решается с помощью ВКЛУ. Наиболее известным квантовым алгоритмом решения систем линейных уравнений является алгоритм Харроу-Хассидим-Ллойд (ХХЛ), который теоретически позволяет экспоненциально ускорить решение линейной системы относительно размерности матрицы, находя кодированное в амплитудах вероятностей кубитов приближенное решение [Harrow, Hassidim, Lloyd, 2009]. Однако ХХЛ предъявляет строгие требования к матрице системы: она должна быть хорошо обусловленной и эрмитовой, а для загрузки данных и извлечения решения требуются затратные процедуры (квантовое оперативное запоминающее устройство и томография состояния) [Salehi Shayegan, 2026]. На практике эти требования и уровень шума в современных квантовых процессорах пока ограничивают его применимость. Более адаптированным к возможностям шумных квантовых устройств промежуточного масштаба является алгоритм ВКЛУ [Bravo-Prieto et al., 2023]. Данный алгоритм использует гибридный подход: параметризованную квантовую схему для подготовки пробного состояния и классический оптимизатор для минимизации функции стоимости, измеряемой на квантовом устройстве, что позволяет обойти некоторые ограничения ХХЛ, хотя и без гарантированного экспоненциального ускорения.

Применение данных квантовых методов к системам, возникающим при конечно-разностной аппроксимации уравнения Дарси, является предметом исследования в области цифрового моделирования пластовых систем [Rao, 2024б, 2024в], представленным в данной работе.

Классические и квантовые алгоритмы численного решения уравнений

Уравнение пьезопроводности (или упругой фильтрации) является основным уравнением, описывающим распространение возмущений давления в пласте, заполненном упругой жидкостью (нефтью, водой, газом). Для случая двумерной области оно имеет вид:

$$\partial p / \partial t = \chi \Delta p + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \quad (1),$$

где $p(x, y, t)$ – давление, χ – коэффициент пьезопроводности, Δ – оператор Лапласа, $f(x, y, t)$ – моделирующая функция для источника или стока. Уравнение (1) необходимо дополнить сопутствующими начальными $p(x, y, 0) = p_0(x, y)$ условиями и граничными условиями Дирихле, Неймана или другими в зависимости от задачи.

Эйкональное (квазистационарное) приближение применяется, когда процессы установления давления происходят значительно быстрее, чем изменение граничных условий или дебитов. В этом случае производной по времени $\partial p / \partial t$ в (1) пренебрегают, и для каждого момента времени задача сводится к уравнению Пуассона:

$$\Delta p(x, y) = -q(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (2),$$

где $q(x,y) = f(x,y)/\chi$ – приведенная функция источников/стоков, а граничные условия остаются прежними. Таким образом, для дискретного набора моментов времени t_k решается задача (2). Ее численное решение классическими методами (конечных разностей или конечных элементов) для высокодетальных сеток, содержащих миллионы узлов, требует значительных вычислительных ресурсов, что является главным мотивом для поиска потенциально более быстрых квантовых алгоритмов [Sahimi, Tahmasebi, 2022; Amaral et al., 2026].

Алгоритм ХХЛ – это квантовый алгоритм для решения систем линейных уравнений. В идеальных условиях он обеспечивает экспоненциальное ускорение решения системы линейных уравнений по сравнению с классическими прямыми алгоритмами. Это делает его потенциальным кандидатом для решения больших разреженных систем, возникающих при дискретизации уравнений типа (2) при наличии квантового компьютера с достаточно большим количеством кубитов.

Аналитическое решение уравнения Лапласа/Пуассона, полученного из закона Дарси, возможно лишь для ограниченного числа простейших конфигураций области фильтрации и граничных условий. Реальные задачи, связанные с моделированием фильтрации в природных пластах или образцах керна, характеризуются сложной геометрией, неоднородностью свойств среды и нетривиальными граничными условиями. Это делает необходимым применение численных методов, которые позволяют найти приближенное решение в дискретных точках расчетной области.

Среди семейства численных методов (конечных элементов, конечных объемов, спектральных методов) метод конечных разностей (МКР) является одним из наиболее удобных подходов для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Его ключевая идея – замена производных, входящих в исходное дифференциальное уравнение, их приближенными выражениями через значения искомой функции в соседних точках дискретной расчетной сетки. В результате задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Для наглядности рассматривается двумерная стационарная задача фильтрации несжимаемой жидкости в однородной изотропной пористой среде на прямоугольной области $\Omega=[0, L_x]\times[0, L_y]$. Влияние силы тяжести не учитывается. Уравнение Пуассона для поля давления $p(x,y)$ с источником/стоком $q(x,y)$ имеет вид:

$$(\partial^2 p)/(\partial x^2) + (\partial^2 p)/(\partial y^2) = -q(x,y) \quad (3).$$

На границах области заданы условия Дирихле (значения давления известны):

$$p(0,y)=p_0(y), \quad p(L_x,y)=p_1(y), \quad p(x,0)=p_0(x), \quad p(x, L_y)=p_1(x) \quad (4).$$

Первый шаг МКР – дискретизация области, для этого прямоугольная область Ω разбивается на равномерную сетку с шагами h_x и h_y , количество интервалов по осям x и y

обозначается как N_x и N_y . Тогда узлы сетки задаются координатами:

$$x_i = i \cdot h_x, \quad i=0,1,\dots,N_x, \quad y_j = j \cdot h_y, \quad j=0,1,\dots,N_y \quad (5).$$

Искомое поле давления теперь представляет собой множество значений в узлах сетки: $p_{(i,j)} \approx p(x_i, y_j)$. Аналогично дискретизируется правая часть: $f_{(i,j)} = f(x_i, y_j)$.

Далее идет замена производных конечными разностями. Для второй производной по x в точке (x_i, y_j) используется центральная разностная схема второго порядка:

$$(\partial^2 p / (\partial x^2))_{(i,j)} \approx (p_{(i-1,j)} - 2p_{(i,j)} + p_{(i+1,j)}) / h_x^2 + O(h_x^2) \quad (6).$$

Аналогично для производной по y . Далее, подставляя приближенные значения для производных в исходное уравнение Пуассона (3) в узле (i,j) , получается разностное уравнение:

$$(p_{(i-1,j)} - 2p_{(i,j)} + p_{(i+1,j)}) / h_x^2 + (p_{(i,j-1)} - 2p_{(i,j)} + p_{(i,j+1)}) / h_y^2 = f_{(i,j)} / \chi \quad (7).$$

Уравнение (7) записывается для всех внутренних узлов сетки, $i=1,\dots,N_x-1$ и $j=1,\dots,N_y-1$. Граничные узлы (где $i=0, N_x$ или $j=0, N_y$) исключаются из системы, так как значения давления в них известны из граничных условий и переносятся в правую часть уравнений для соседних внутренних узлов.

Для удобства решения глобальной СЛАУ все неизвестные значения $p_{(i,j)}$ во внутренних узлах переиндексируются в один глобальный вектор неизвестных p длины $N = (N_x - 1) \times (N_y - 1)$. Каждому внутреннему узлу (i,j) ставится в соответствие глобальный индекс n . Объединением таких уравнений для всех внутренних узлов формируется СЛАУ вида:

$$Ap = b \quad (8),$$

где матрица A коэффициентов представляет собой разреженную матрицу размерности $N \times N$. Каждая строка матрицы соответствует одному внутреннему узлу и содержит не более пяти ненулевых элементов (для двумерного случая). Матрица обладает свойствами симметричности, положительной определенности и имеет ленточную структуру. Вектор правой части b длины N включает значения источников/стоков $f_{(i,j)}$ и вклад от известных граничных условий.

Оптимальными классическими методами для решения полученной системы уравнений вида (8) являются так называемые прямые методы, дающие решение системы линейных уравнений за конечное число арифметических операций. Основная идея – преобразовать исходную матрицу A к треугольному виду с помощью эквивалентных преобразований, не меняющих решение, после чего решение находится простой обратной подстановкой. Наиболее универсальным и широко применяемым прямым методом является LU-разложение (разложение Гаусса). Вычислительная сложность алгоритма для матрицы размера $N \times N$ составляет $O(N^3)$ для фазы разложения и $O(N^2)$ для фазы решения. Это делает их ресурсоемкими для очень больших систем.

Из квантовых алгоритмов рассматриваются ХХЛ и ВКЛУ. Квантовый алгоритм ХХЛ

теоретически решает систему линейных уравнений (8) с экспоненциальным ускорением по сравнению с классическими методами относительно размерности матрицы N . Вместо явного нахождения вектора $\mathbf{p}$ алгоритм готовит квантовое состояние $|p\rangle$, амплитуды которого пропорциональны компонентам искомого решения. Ключевые этапы данного алгоритма рассматриваются ниже.

Вектор $\mathbf{b}$ кодируется в амплитуды кубитов $|b\rangle$. Матрица A должна быть эрмитовой (или расширена до таковой); информация о ней используется для реализации квантовой симуляции оператора e^{iAt} . Далее, с помощью квантового преобразования Фурье и квантовой оценки фазы состояние $|b\rangle$ раскладывается по собственному базису матрицы A . Затем производится обратное квантовое преобразование Фурье. В идеале результирующее состояние кубитов будет представлять собой состояние $|p\rangle$.

В отличие от ХХЛ, требующего глубоких квантовых схем и устойчивости к ошибкам, алгоритм ВКЛУ представляет собой гибридный квантово-классический алгоритм, предназначенный для работы на современных квантовых устройствах. ВКЛУ не требует ни точной фазовой оценки, ни больших вспомогательных регистров, ни обращения собственных значений. Вместо этого он параметризует пробное решение и минимизирует целевую функцию с помощью классического оптимизатора.

Основная идея алгоритма следующая. Пусть требуется найти $\mathbf{p}$ такое, чтобы оно удовлетворяло (8). При квантовой постановке задачи ищется состояние $|\psi(\theta)\rangle = V(\theta)|0\rangle$, где $V(\theta)$ – параметризованная квантовая схема, называемая анзацем, с набором классических параметров θ . Цель – минимизировать меру невязки, которая на квантовом устройстве может быть вычислена как математическое ожидание некоторого оператора. При сходимости получают $|\psi(\theta_*)\rangle \approx \frac{|p\rangle}{\|\mathbf{p}\|}$.

Классическая норма невязки $\|A|x\rangle - |b\rangle\|^2$ не является непосредственно измеряемой величиной. В ВКЛУ применяются специальные целевые функции (глобальная и локальная). Глобальная целевая функция определяется следующим образом:

$$C_G(\theta) = 1 - \frac{|\langle b | A | \psi(\theta) \rangle|^2}{\langle \psi(\theta) | A^\dagger A | \psi(\theta) \rangle} \quad (9).$$

Она равна нулю тогда и только тогда, когда $|\psi(\theta)\rangle \propto A^{-1}|b\rangle$. Однако её градиенты экспоненциально малы с ростом числа кубитов, что приводит к проблеме плато. По этой причине на практике обычно применяется локальная целевая следующего вида:

$$C_L(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N |\langle b | A | \psi(\theta) \rangle| \quad (10).$$

В оригинальной работе [Bravo-Prieto et al., 2023] определена следующая локальная функция стоимости:

$$C_L(\theta) = \frac{\langle \psi(\theta) | H_L | \psi(\theta) \rangle}{\langle \psi(\theta) | A^\dagger A | \psi(\theta) \rangle} \quad (11),$$

где $H_L = A^\dagger \left(I - \frac{|b\rangle\langle b|}{\|b\|^2} \right) A$.

Эта величина может быть вычислена как сумма локальных наблюдаемых, каждая из которых действует лишь на небольшое число кубитов. На практике часто используют упрощённый вариант:

$$C(\theta) = 1 - \frac{|\langle b | A | \psi(\theta) \rangle|^2}{\langle \psi(\theta) | A^\dagger A | \psi(\theta) \rangle \langle b | b \rangle} \quad (12).$$

В данном случае оценивают числитель и знаменатель с помощью отдельных схем измерений.

Основные этапы алгоритма ВКЛУ: матрица A и вектор $\mathbf{b}$ задаются классически. Для квантового алгоритма необходимо представить A в виде линейной комбинации унитарных операторов $A = \sum_{k=1}^L c_k U_k$, где U_k – унитарные (например, тензорные произведения матриц Паули). Аналогично $|b\rangle$ определяется с помощью простой схемы (например, последовательностью однокубитовых вращений, если N невелико). Для задач фильтрации малой размерности эта процедура выполняется классическим симулятором, а на реальном квантовом процессоре потребовалось бы явное построение схемы. Затем выбирается параметризованная квантовая схема $V(\theta)$ (например, чередование слоёв однокубитовых вращений $R_y(\theta_i)$ и операторов CNOT). Начальные параметры $\theta^{(0)}$ задаются случайно или $|\psi(\theta)\rangle$ близкий к $|b\rangle$. Глубина схемы обычно невелика (десятки слоёв). После выбора анзаца для текущих θ многократно измеряются величины, необходимые для вычисления $C(\theta)$. Таким образом, проводят оценку $\langle \psi(\theta) | A^\dagger A | \psi(\theta) \rangle$. Для этих целей можно разложить $A^\dagger A$ в сумму унитарных операторов и вычислить среднее значение через отдельные схемы с дополнительным управляющим кубитом (метод Адамара); оценку $\langle b | A | \psi(\theta) \rangle$. Для этого требуется схема, которая вычисляет перекрытие между состояниями $|b\rangle$ и $A|\psi(\theta)\rangle$, и используется метод вычисления амплитуды с помощью вспомогательного кубита. Итоговое $C(\theta)$ получают как отношение измеренных величин (с учётом статистической погрешности). Далее полученное значение $C(\theta)$ передаётся классическому оптимизатору: градиентный спуск, COBYLA (метод оптимизации с ограничениями на основе линейных аппроксимаций), SPSA (метод стохастической аппроксимации с одновременным возмущением), алгоритм Adam и др. Оптимизатор обновляет θ и повторяет предыдущий шаг. Процесс продолжается, пока $C(\theta)$ не станет меньше заданного порога, или не будет достигнуто максимальное число итераций. После сходимости финальное состояние $|\psi(\theta_*)\rangle$ принимается за решение. Затем

необходимо извлечь из состояния $|\psi(\theta_*)\rangle$ решение в классическом виде, т.е. в виде вектора $\mathbf{x}$. Для получения вектора $\mathbf{x}$ необходимо провести квантовую томографию состояния $|\psi(\theta_*)\rangle$.

Решение $\mathbf{p}$ доступно не в явном классическом виде, а в виде квантового состояния $|\mathbf{p}\rangle$. Извлечение полного вектора классическими средствами (томография состояния) требует дополнительных измерений и уничтожает квантовое преимущество. Алгоритм полезен, когда дальнейшие вычисления выполняются на квантовом компьютере. Алгоритм ХХЛ является непрактичным в условиях современных «шумных» квантовых устройств из-за большой глубины схем, требований к точности и сложности извлечения полезной классической информации [Ali, Kabel, 2023]. Для современного этапа развития квантовых устройств наиболее оптимальным является алгоритм ВКЛУ - гибридный квантово-классический алгоритм, разработанный для работы на современных квантовых процессорах промежуточного масштаба. Он обходит многие ограничения алгоритма ХХЛ, формулируя задачу решения СЛАУ как задачу вариационной оптимизации.

Прежде всего искомое решение $\mathbf{p}$ параметризуется квантовой схемой (вариационным анзацом) $V(\theta)$ [Rao, 2024a; Liu et al., 2024] с набором классических параметров θ . Эта схема действует на начальное состояние $|0\rangle$, создавая пробное состояние $|\psi(\theta)\rangle = V(\theta)|0\rangle$, которое должно аппроксимировать $|\mathbf{p}\rangle$. Затем строится эрмитов оператор H , такой, что его минимальное собственное значение соответствует решению системы (8). Функция стоимости $C(\theta)$ вычисляется как математическое ожидание этого оператора в состоянии $|\psi(\theta)\rangle$. Минимум $C(\theta)$ достигается, когда $|\psi(\theta)\rangle$ пропорционально $|\mathbf{p}\rangle$. Далее квантовый процессор многократно измеряет $C(\theta)$ для разных наборов параметров θ . Классический оптимизатор (например, градиентный спуск) анализирует эти измерения и итеративно обновляет θ , стремясь минимизировать функцию стоимости. Алгоритм использует менее глубокие квантовые схемы, что делает его реализуемым на существующих эмуляторах квантовых компьютеров [Bravo-Prieto et al., 2023].

Практическое сравнение классического метода и вариационного квантового алгоритма решения систем линейных уравнений

Для сравнительного анализа точности алгоритма ВКЛУ рассматривается решение стационарной задачи фильтрации в двумерной области на основе закона Дарси. В качестве материала выбрано томографическое изображение среза керна образца №36/2024, с Восточно-Ольховского месторождения, скв. 401, проходка – 12 м, линейный вынос керна – 11,81 м, глубина отбора – 2763,81 м (рис. 1).

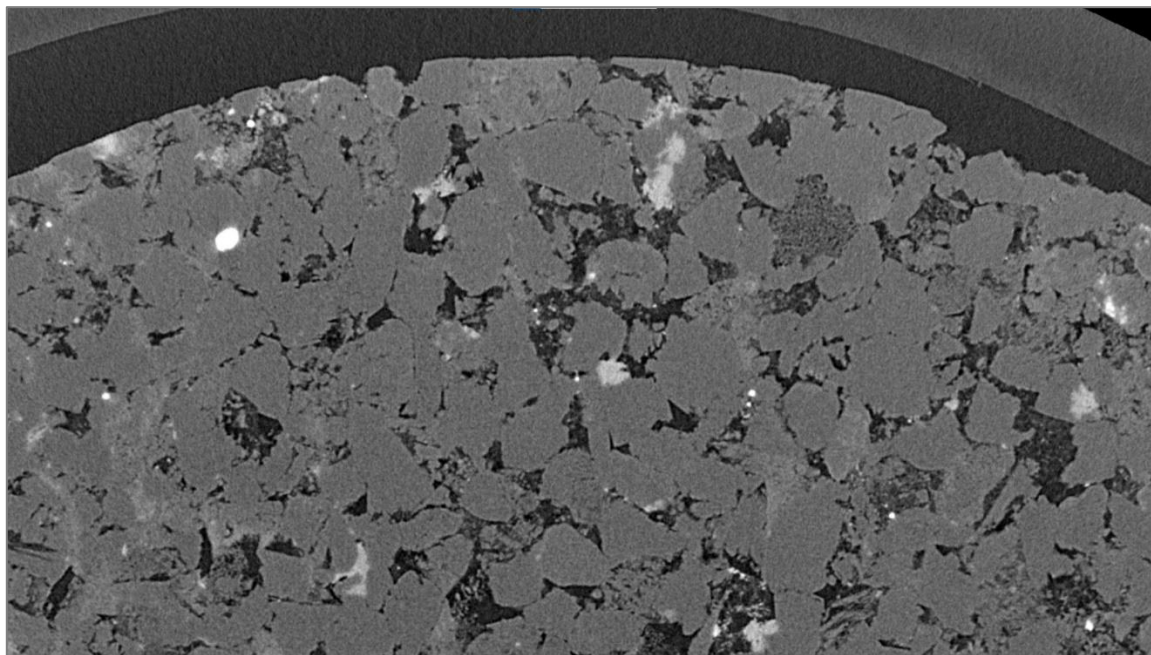


Рис. 1. Томографическое изображение среза образца керна № 36/2024, использованное в качестве модельной пористой среды

Восточно-Ольховское месторождение, скв. 401, проходка - 12 м, линейный вынос керна - 11,81 м, глубина отбора - 2763,81 м.

Для данного изображения строится двумерная маска случайно выбранной области размером 8×8 . Для этой области выполняется дискретизация (7) для уравнения Пуассона с известными давлениями на входе и выходе из области. Далее, к полученной системе уравнений, последовательно применяются классический алгоритм решения системы линейных уравнений и вариационный квантовый алгоритм решения системы линейных уравнений [Trahan et al., 2023]. На основе полученного решения производится визуализация поля давлений в области и поля скоростей на основе закона Дарси. Также вычисляется ошибка квантового алгоритма относительно классического (рис. 2).

На рис. 2 представлены результаты расчёта: а – маска исходной пористой области; б – абсолютная ошибка давления квантового решения относительно классического; в, г – поля давления, полученные классическим алгоритмом (LU-разложение) и алгоритмом ВКЛУ соответственно; д, е – модуль скорости фильтрации, рассчитанный для классического и квантового решений соответственно.

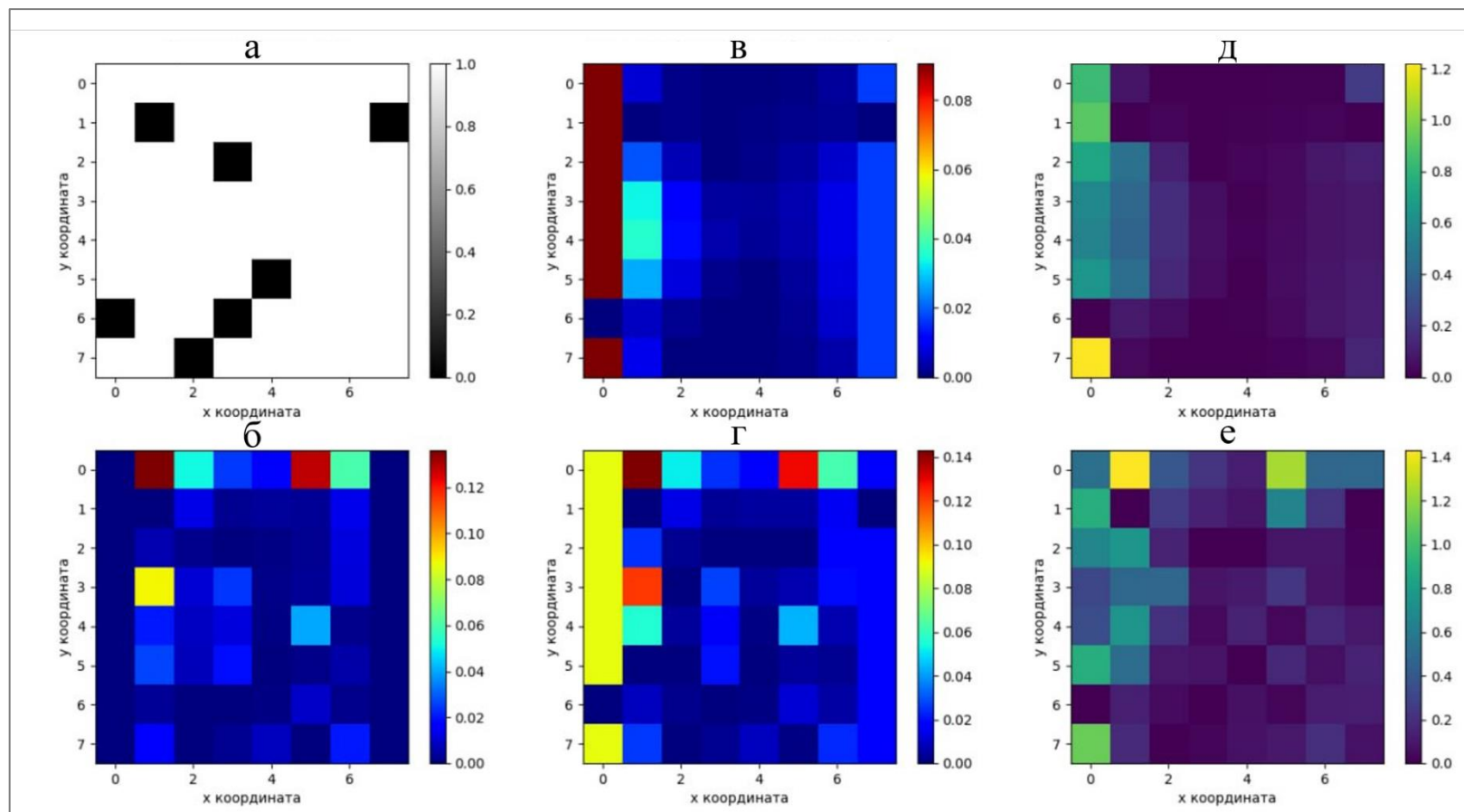


Рис. 2. Сравнение классического (LU-разложение) и вариационного квантового (ВКЛУ) решений задачи фильтрации на области 8×8 узлов
а - маска пористой области; б - абсолютная ошибка давления; в, г - поле давления (классический алгоритм и ВКЛУ соответственно); д, е - модуль скорости фильтрации (классический алгоритм и ВКЛУ соответственно).

Заключение

Численное моделирование фильтрации в пористой среде на основе уравнения пьезопроводности требует решения больших систем линейных уравнений, что делает эту задачу вычислительно сложной. Проведено сравнение эффективности классического LU-разложения и перспективного алгоритма ВКЛУ для решения одной и той же конечно-разностной задачи, возникающей при дискретизации уравнения Пуассона для давления. В качестве среды выбран томографический снимок керна с областью 8x8 узлов.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что алгоритм ВКЛУ успешно справился с поставленной задачей. Применение данного гибридного квантово-классического алгоритма позволило получить распределение давления, качественно и количественно близкое к решению, полученному классическим методом. Визуальное сравнение полей давления и скоростей, а также анализ абсолютных ошибок подтвердили, что алгоритм может адекватно аппроксимировать решение системы уравнений, демонстрируя корректную работу на относительно небольшом модельном примере.

Ключевым результатом работы является демонстрация принципиальной применимости алгоритмов класса ВКЛУ для задач цифрового моделирования керна. Несмотря на то, что в рамках данной работы решалась задача на сетке существенно ограниченного размера, полученные результаты представляют собой важный шаг в исследовании потенциала квантовых вычислений для нефтегазовой отрасли. Успешное восстановление картины течения подтверждает, что подобные гибридные алгоритмы могут стать основой для будущих инструментов.

Таким образом, сравнение методов решения подтвердило работоспособность вариационного квантового подхода для базовых задач фильтрации. Это открывает возможности для дальнейших исследований, направленных на применение подобных алгоритмов к более сложным и крупномасштабным моделям, где классические методы могут столкнуться с ограничениями по скорости и памяти.

Финансирование. Исследование частично выполнено в рамках Государственного Задания РФ «Наука» проект FSWW-2026-0045, а также при финансовой поддержке Российской Федерации в лице Минобрнауки России по Соглашению № 075-15-2025-510.

Литература

Ali M., Kabel M. Performance study of variational quantum algorithms for solving the Poisson equation on a quantum computer // Physical Review Applied. - 2023. - Vol. 20. - № 1. - P. 014054. DOI: [10.1103/PhysRevApplied.20.014054](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.20.014054)

Amaral C.A., Oliveira V.L., Salazar J.P.L.C., Duzzioni E.I. A review of quantum machine learning and quantum-inspired applied methods to computational fluid dynamics // *Brazilian Journal of Physics.* - 2026. - Vol. 56. - № 1. - P. 39. DOI: [10.1007/s13538-025-01959-8](https://doi.org/10.1007/s13538-025-01959-8)

Bravo-Prieto C., LaRose R., Cerezo M., Subasi Y., Cincio L., Coles P.J. Variational quantum linear solver // *Quantum.* - 2023. - Vol. 7. - P. 1188. DOI: [10.22331/q-2023-11-22-1188](https://doi.org/10.22331/q-2023-11-22-1188)

Harrow A.W., Hassidim A., Lloyd S. Quantum algorithm for linear systems of equations // *Physical Review Letters.* - 2009. - Vol. 103. - № 15. - P. 150502. DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.150502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.150502)

Liu Y.Y., Chen Z., Shu C., Rebentrost P., Liu Y.G., Chew S.C., Khoo B.C., Cui Y.D. A variational quantum algorithm-based numerical method for solving potential and Stokes flows // *Ocean Engineering.* - 2024. - Vol. 292. - P. 116494. DOI: [10.1016/j.oceaneng.2023.116494](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.116494)

Rao X. Performance study of variational quantum linear solver with an improved ansatz for reservoir flow equations // *Physics of Fluids.* - 2024a. - Vol. 36. - № 4. - P. 047104. DOI: [10.1063/5.0201739](https://doi.org/10.1063/5.0201739)

Rao X. Quantum computing implementation for solving pressure equations in reservoir numerical simulation // *6th Asia Pacific Meeting on Near Surface Geoscience and Engineering.* - Tsukuba, Japan: EAGE, 2024b. - P. 1-5. DOI: [10.3997/2214-4609.202472014](https://doi.org/10.3997/2214-4609.202472014)

Rao X. The first application of quantum computing algorithm in streamline-based simulation of water-flooding reservoirs // *Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference (ADIPEC).* - Abu Dhabi: SPE, 2024b. - Paper SPE-221850-MS. DOI: [10.2118/221850-MS](https://doi.org/10.2118/221850-MS)

Sahimi M., Tahmasebi P. The potential of quantum computing for geoscience // *Transport in Porous Media.* - 2022. - Vol. 145. - № 2. - P. 367-387. DOI: [10.1007/s11242-022-01855-8](https://doi.org/10.1007/s11242-022-01855-8)

Salehi Shayegan A.H. Quantum linear solvers for scientific computing: a comparison of VQLS, HHL and quantum annealing on time-fractional diffusion problems // *Scientific Reports.* - 2026. - Vol. 16. - № 1. - P. 10278. DOI: [10.1038/s41598-026-40910-y](https://doi.org/10.1038/s41598-026-40910-y)

Trahan C.J., Loveland M., Davis N., Ellison E. A variational quantum linear solver application to discrete finite-element methods // *Entropy.* - 2023. - Vol. 25. - № 4. - P. 580. DOI: [10.3390/e25040580](https://doi.org/10.3390/e25040580)

This is an open access article under the CC BY 4.0 license

Received 29.06.2026

Published 21.09.2026

Amirkhanov D.S., Merzlikin B.S., Shishaev G.Yu., Shirokov A.V., Matveev I.V.

National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia, denis.amirhanov@yandex.ru, merzlikin@tpu.ru, shishaevgy@hw.tpu.ru, shirokovAV@hw.tpu.ru, mivvas@tpu.ru

ANALYSIS OF THE APPLICABILITY OF THE VARIATIONAL QUANTUM LINEAR SOLVER TO FLUID FILTRATION MODELING IN A CORE SAMPLE

This paper assesses the applicability of quantum linear-system algorithms – the Harrow–Hassidim–Lloyd algorithm and the variational quantum linear solver – to the steady-state filtration of an incompressible fluid in a porous medium. In the eikonal (quasi-stationary) approximation, the initial–boundary value problem for the pressure diffusivity equation reduces to the Poisson equation for pressure, which is discretized by the finite-difference method into a system of linear algebraic equations. The structural correspondences between the problem formulation and the requirements of the quantum algorithms are analyzed, and the issues of data encoding, quantum state preparation, and result extraction are discussed. The approach is validated on a tomographic image of a real core sample slice: for an 8×8 node region, the solutions obtained by the variational quantum linear solver and by a classical direct matrix-decomposition method are compared in terms of the pressure and filtration-velocity fields, with an estimate of the absolute error. The variational quantum linear solver is shown to reproduce a pressure distribution and velocity field consistent with the classical solution, confirming the correct operation of the hybrid quantum-classical approach on a model example. The results demonstrate the feasibility of using variational quantum linear-solver algorithms for digital core modeling, outline their advantages and fundamental limitations in the context of subsurface hydrodynamics, and define the direction of further research on larger models.

Keywords: porous-media fluid filtration, systems of linear equations, variational quantum algorithms, variational quantum linear solver, Harrow–Hassidim–Lloyd algorithm, finite-difference method, Poisson equation, digital core modeling.

For citation: Amirkhanov D.S., Merzlikin B.S., Shishaev G.Yu., Shirokov A.V., Matveev I.V. Analysis of the applicability of the variational quantum linear solver to fluid filtration modeling in a core sample. *Neftegazovaya Geologiya. Teoriya i Praktika*, 2026, vol. 21, no. 3, available at: https://www.ngtp.ru/rub/2026/24_2026.html EDN: SLOFKA

References

- Ali M., Kabel M. Performance study of variational quantum algorithms for solving the Poisson equation on a quantum computer. *Physical Review Applied*, 2023, vol. 20, no. 1, pp. 014054. DOI: [10.1103/PhysRevApplied.20.014054](https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.20.014054)
- Amaral C.A., Oliveira V.L., Salazar J.P.L.C., Duzzioni E.I. A review of quantum machine learning and quantum-inspired applied methods to computational fluid dynamics. *Brazilian Journal of Physics*, 2026, vol. 56, no. 1, p. 39. DOI: [10.1007/s13538-025-01959-8](https://doi.org/10.1007/s13538-025-01959-8)
- Bravo-Prieto C., LaRose R., Cerezo M., Subasi Y., Cincio L., Coles P. J. Variational quantum linear solver. *Quantum*, 2023, vol. 7, p. 1188. DOI: [10.22331/q-2023-11-22-1188](https://doi.org/10.22331/q-2023-11-22-1188)
- Harrow A.W., Hassidim A., Lloyd S. Quantum algorithm for linear systems of equations. *Physical Review Letters*, 2009, vol. 103, no. 15, p. 150502. DOI: [10.1103/PhysRevLett.103.150502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.150502)
- Liu Y.Y., Chen Z., Shu C., Rebentrost P., Liu Y.G., Chew S.C., Khoo B.C., Cui Y.D. A variational quantum algorithm-based numerical method for solving potential and Stokes flows. *Ocean Engineering*, 2024, vol. 292, p. 116494. DOI: [10.1016/j.oceaneng.2023.116494](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.116494)
- Rao X. Performance study of variational quantum linear solver with an improved ansatz for reservoir flow equations. *Physics of Fluids*, 2024a, vol. 36, no. 4, p. 047104. DOI: [10.1063/5.0201739](https://doi.org/10.1063/5.0201739)
- Rao X. Quantum computing implementation for solving pressure equations in reservoir

numerical simulation. *6th Asia Pacific Meeting on Near Surface Geoscience and Engineering*. Tsukuba, Japan: EAGE, 2024b, pp. 1-5. DOI: [10.3997/2214-4609.202472014](https://doi.org/10.3997/2214-4609.202472014)

Rao X. The first application of quantum computing algorithm in streamline-based simulation of water-flooding reservoirs. *Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference (ADIPEC)*. Abu Dhabi: SPE, 2024c, paper SPE-221850-MS. DOI: [10.2118/221850-MS](https://doi.org/10.2118/221850-MS)

Sahimi M., Tahmasebi P. The potential of quantum computing for geoscience. *Transport in Porous Media*, 2022, vol. 145, no. 2, pp. 367-387. DOI: [10.1007/s11242-022-01855-8](https://doi.org/10.1007/s11242-022-01855-8)

Salehi Shayegan A. H. Quantum linear solvers for scientific computing: a comparison of VQLS, HHL and quantum annealing on time-fractional diffusion problems. *Scientific Reports*, 2026, vol. 16, no. 1, p. 10278. DOI: [10.1038/s41598-026-40910-y](https://doi.org/10.1038/s41598-026-40910-y)

Trahan C. J., Loveland M., Davis N., Ellison E. A variational quantum linear solver application to discrete finite-element methods. *Entropy*, 2023, vol. 25, no. 4. 580 p. DOI: [10.3390/e25040580](https://doi.org/10.3390/e25040580)